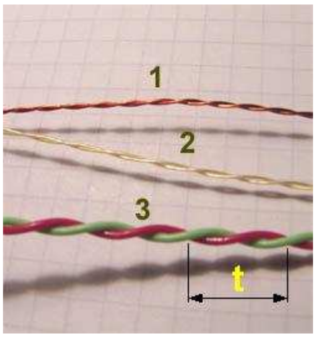
TRANSMISSION DE SIGNAUX SUR UNE LIGNE

Une ligne est un ensemble de deux conducteurs, chargés de transmettre un signal d'un point à un autre.

Les types de lignes les plus employées sont :

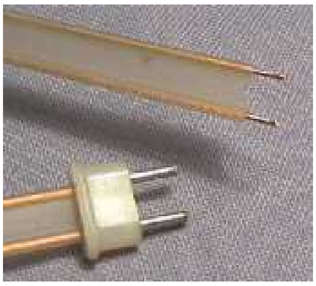
• La ligne bifilaire

Elle est formée de 2 conducteurs isolés, placés côte à côte.
On la rencontre sous forme torsadée dans le réseau téléphonique « filaire ».



Paire torsadée
t : longueur d'une torsade

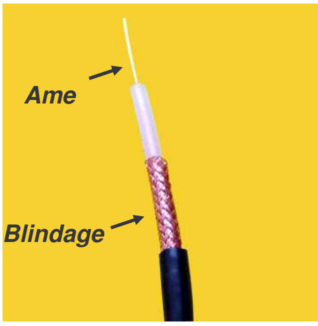
On la trouve également sous forme de 2 conducteurs de cuivre multibrins, disposés parallèlement , et séparés par un « ruban » de polyéthylène. (ligne « twin lead »)
Elle est utilisée par exemple comme descente d'antenne radio TV (en Allemagne)



Ligne twin lead

• La ligne coaxiale

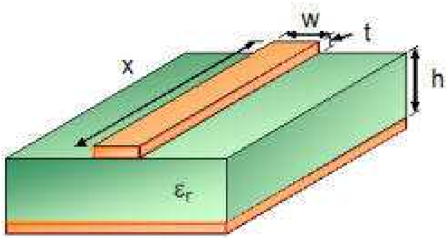
Elle est formée de 2 conducteurs concentriques, nommés « âme » et « blindage »
C'est la ligne utilisée pour les descentes d'antennes TV, comme liaison entre l'oscilloscope et le montage étudié…



Ligne coaxiale

• La ligne imprimée

Cette ligne est imprimée sur de l'époxy double face : Elle comprend, sur une face, un conducteur formé par une piste (ruban) et , sur l'autre face, un plan de masse.
Ce type de ligne se rencontre notamment en hyperfréquences.



Ligne microruban
(microstrip)

1 . Description électrique d'une ligne.

1.1 Résistance.

Chacun des conducteurs de la ligne est caractérisé par une résistance, qui dépend essentiellement du métal dont il est fait, et de sa forme.

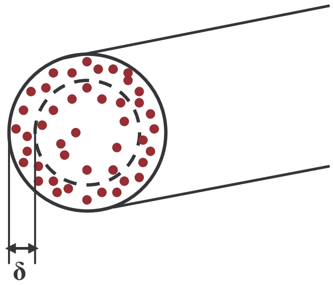
Pour un fil métallique cylindrique, de section S et de longueur l, on rappelle la formule : $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$, dans laquelle ρ désigne la *résistivité* (en Ωm) du métal.

Quelques valeurs de résistivités :	Argent	Cuivre	Aluminium	Fer	Plomb
	$1{,}6\times10^{-8}$ Ωm	$1{,}7\times10^{-8}$ Ωm	$2{,}7\times10^{-8}$ Ωm	$9{,}8\times10^{-8}$ Ωm	20×10^{-8} Ωm

On aura ainsi, pour un fil de cuivre de 1m de long et de diamètre 0,4mm : R ≈ 0,14Ω ; on parlera d'une *résistance linéïque* de 0,14Ω/m pour ce conducteur.

Il faut cependant tenir compte du fait suivant : Dans un conducteur, les électrons de conduction (libres) se repoussent naturellement. Ils ont ainsi tendance à circuler *à la périphérie* du conducteur ; on appelle ce phénomène *effet de peau.*

La densité de courant (en A/mm^2) décroît exponentiellement quand on s'écarte de la surface du conducteur.
On définit *l'épaisseur de peau* **δ** (voir ci-contre) comme l'épaisseur de conducteur dans laquelle la densité de courant chute de 100% à 37% de sa valeur maximale (revoir les propriétés de la fonction exponentielle à ce sujet)



δ peut être calculée à l'aide de la formule : $\delta = \sqrt{\dfrac{\rho}{\pi \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot f}}$

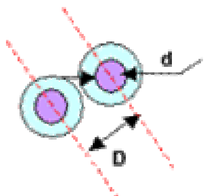
Avec f : fréquence ; ρ : résistivité ; $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$H/m, perméabilité du vide ; μ_r : perméabilité magnétique relative du conducteur, sans dimension ; μ_r vaut 1 pour la plupart des métaux, sauf pour les métaux à propriétés magnétiques (fer, cobalt, nickel et leurs alliages)

Exemple, pour le cuivre : A 50Hz, δ ≈ 9,3mm ; à 500kHz, δ ≈ 0,093mm
Pour les fréquences allant d'une centaine de kHz à quelques MHz on utilise du *fil divisé* c'est à dire un conducteur constitué de multiples brins (diam. 0,05 mm environ) de cuivre émaillé thermo-soudable tressés ensemble, ce qui augmente la surface de la "peau" par rapport à un conducteur plein de section équivalente.

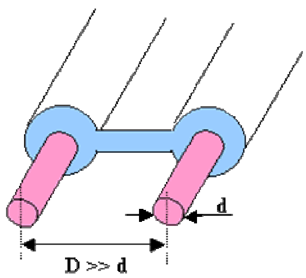
1.2 Capacité.

Une ligne est formée de 2 conducteurs, séparés par un isolant. Ceci correspond à une capacité, *répartie tout au long de la ligne*.
On appelle C la *capacité linéïque* de la ligne (capacité par unité de longueur, exprimée en pF/m)
C peut être calculée grâce au *Théorème de Gauss*.

Pour une paire torsadée : $C = \dfrac{\pi.\varepsilon_0.\varepsilon_r}{\mathrm{Ln}\left(\dfrac{D}{d} + \sqrt{\left(\dfrac{D}{d}\right)^2 - 1}\right)}$

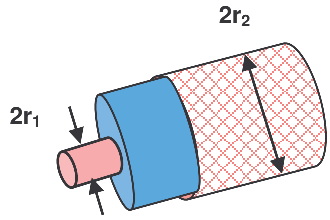


Pour une ligne twin lead : $C = \dfrac{\pi.\varepsilon_0.\varepsilon_r}{\mathrm{Ln}\left(\dfrac{2D}{d}\right)}$



$\varepsilon_0 \approx 8{,}84\times10^{-12}$ F/m, permittivité diélectrique du vide ; ε_r, permittivité relative de l'isolant séparant les 2 conducteurs.

Pour un câble coaxial : $C = \dfrac{2\pi.\varepsilon_0.\varepsilon_r}{Ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}$



Ordres de grandeur :

Pour les diélectriques courants (polyéthylène), on peut prendre $\varepsilon_r \approx 2$

Paire torsadée (d ≈ 0,4mm ; D ≈ 1,2mm) → C ≈ 32pF/m

Ligne twin-lead (d ≈ 0,4mm ; D ≈ 9mm) → C ≈ 15pF/m

Ligne coaxiale « 50Ω » ($r_1 \approx$ 1,6mm; $r_2 \approx$ 5mm) → C ≈ 97pF/m

1.3 Inductance.

Lorsque les 2 conducteurs de la ligne sont parcourus par un courant *variable dans le temps*, ils s'influent mutuellement par effet inductif.
Ceci va correspondre à une inductance *répartie tout au long de la ligne*.
On appelle L *l'inductance linéïque* de la ligne (inductance par unité de longueur, exprimée en µH/m)
L peut être calculée à l'aide du *théorème d'Ampère*.

Pour une paire torsadée : $L = \dfrac{\mu_0.\mu_r}{\pi}.Ln\left(\dfrac{D}{d} + \sqrt{\left(\dfrac{D}{d}\right)^2 - 1}\right)$

Pour une ligne twin lead : $L \approx \dfrac{\mu_0.\mu_r}{\pi}.Ln\left(\dfrac{2D}{d}\right)$

Pour une ligne coaxiale : $L = \dfrac{\mu_0.\mu_r}{2\pi}.Ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)$

Ordres de grandeur. Pour les mêmes lignes que plus haut, on obtient :

Paire torsadée : L ≈ 0,7µH/m

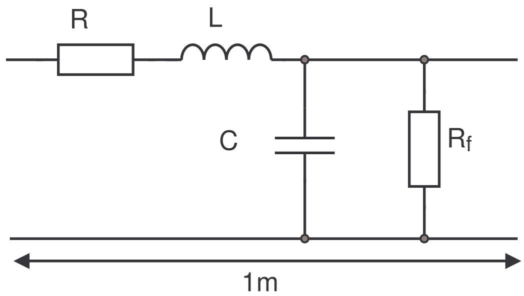
Ligne twin-lead : L ≈ 1,5µH/m

Ligne coaxiale : L ≈ 0,23µH/m

1.4 Modèle électrique.

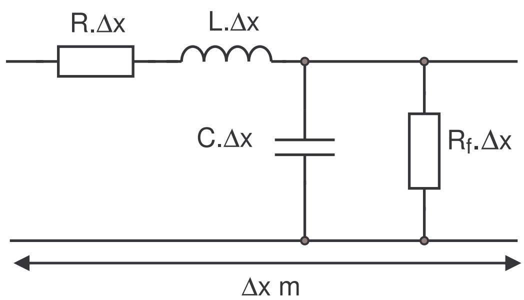
Compte tenu de ce qui précède, une longueur unitaire (1m) de ligne peut être représenté par le modèle électrique de droite.

La résistance R_f correspond aux fuites inévitables dans l'isolant entre les 2 conducteurs ; R_f est bien sur de très forte valeur (10^7 à 10^{10} Ω/m)



Remarque : La structure de ce modèle laisse présager une réponse en fréquence de type passe-bas pour une ligne.

Pour une longueur Δx quelconque, ce modèle devient :



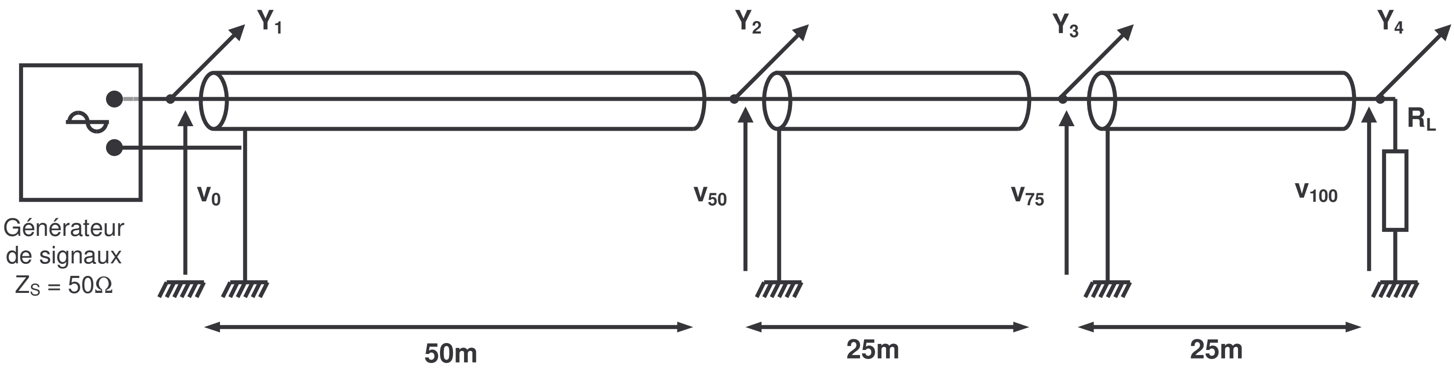
Il est important de noter que les paramètres de description (résistances, inductance et capacité) sont répartis tout au long de la ligne et ne sont pas localisés.

2 . Le phénomène de propagation.

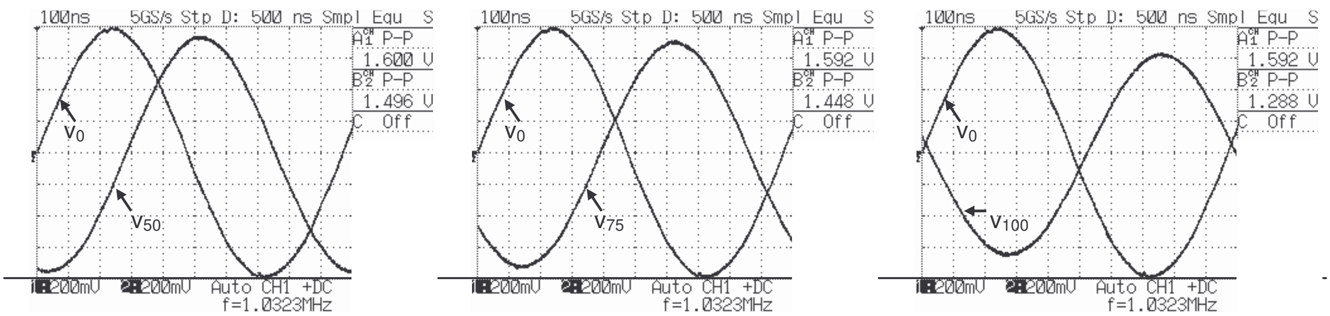
Jusqu'à présent, nous avons toujours considéré que 2 points quelconques d'un conducteur sont au même potentiel instantané. Ceci peut ne plus être vrai, si la longueur de ce conducteur est « grande », ou si la fréquence des signaux traités devient « trop » élevée.

2.1 Mise en évidence d'une propagation.

Nous réalisons simplement l'expérience suivante : On dispose d'un câble coaxial de longueur totale 100m, formé par l'assemblage d'un tronçon de 50m et de 2 tronçons de 25m, comme représenté sur la figure ci-dessous :

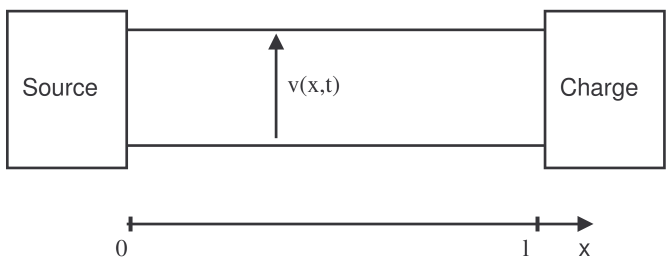


Il s'agit de coaxial « 50Ω » ; le générateur délivre une tension sinusoïdale, de fréquence 1MHz et d'amplitude 0,8V ; la ligne est fermée sur une résistance de 50Ω. (Nous verrons plus loin l'importance de cette adaptation)
On obtient les relevés suivants pour les tensions v_0, v_{50}, v_{75} et v_{100} .



On peut constater un retard δt croissant sur v_0, de v_{50} (≈ 280ns) à v_{75} (≈ 380ns) puis à v_{100} (≈ 520ns).
Ces retards correspondent à une *vitesse de propagation du signal* sur la ligne proche de 200000km/s.

2.2 Vitesse de propagation – Longueur d'onde.



Considérons la tension v, transmise sur la ligne, de la source vers la charge R_L.
Au niveau de la source (x = 0), on écrit :

$$v(0,t) = \hat{V} \times \cos \omega t$$

v se propageant à la vitesse c sur la ligne, elle arrive à l'abscisse x avec un retard $\delta t = \frac{x}{c}$, soit :

$$v(x,t) = \hat{V} \times \cos \omega(t - \delta t) = \hat{V} \times \cos(\omega t - \frac{\omega x}{c})$$ (en admettant une conservation de l'amplitude)

La propagation sur une distance x entraîne un retard de phase $\delta\varphi = \frac{\omega x}{c}$; si δφ = 2π, x correspond à la *longueur d'onde λ associée au signal.* (on rappelle la relation $\lambda = cT = \frac{c}{f}$) La longueur d'onde est la distance parcourue à la vitesse c par un signal de fréquence f durant la période T .

Quand peut-on négliger le phénomène de propagation ?

Au niveau de la charge, x = l, $v(l,t) = \hat{V} \times \cos(\omega t - \frac{\omega l}{c})$; tant que le retard de phase $\frac{\omega l}{c}$ reste négligeable, on peut admettre que v(l,t) ≈ v(0,t) et que la propagation est inexistante : C'est l'*approximation de l'état quasi stationnaire*.

Par extension, pour un circuit de dimension l, on négligera tout phénomène de propagation si la condition $\frac{\omega l}{c} << 1$ est vérifiée.

Cette condition peut s'écrire $l << \frac{c}{2\pi f}$ ou encore $f << \frac{c}{2\pi l}$

On retiendra la condition suivante : l << λ pour pouvoir négliger le phénomène de propagation.

Prenons c ≈ 200000km/s :

- à f = 1MHz, on obtient l << 32m → la propagation se fera sentir dès que l dépassera quelques mètres.
- pour l = 1m, on obtient f << 32MHz → la propagation sera effective dès quelques mégahertz.

Expression de la vitesse de propagation.

Pour une ligne de constantes réparties L et C, supposée sans pertes, la résolution de l'équation de propagation (voir annexe) amène à :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

En reprenant les expressions trouvées pour l'inductance et la capacité linéïques de diverses lignes, on arrive à :

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 . \varepsilon_r . \mu_0 . \mu_r}}$$

Or, $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 . \mu_0}} \approx 300000 km/s = c_0$, vitesse de la lumière dans le vide ; pour la plupart des lignes, $\mu_r = 1$; dans ces conditions, la vitesse d'un signal sur une ligne sans pertes peut s'écrire :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}}$$

Pour les lignes habituelles, à isolant plastique, $2 < \varepsilon_r < 3$, d'où 200000km/s > c > 175000km/s.

3 . Importance de l'adaptation des impédances.

Au paragraphe précédent, nous avons mis en évidence la propagation d'une seule onde incidente sur une ligne. Cette ligne était fermée en son extrémité par une résistance de valeur égale à son impédance caractéristique.

Dans le cas général (voir annexe), la résolution de l'équation de propagation amène la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie.

→ Conséquence : *Lorsqu'un générateur envoie des signaux sur une ligne fermée sur son impédance caractéristique, ces signaux ne se réfléchissent jamais à l'extrémité de la ligne : Tout se passe comme si la ligne était de longueur infinie !*

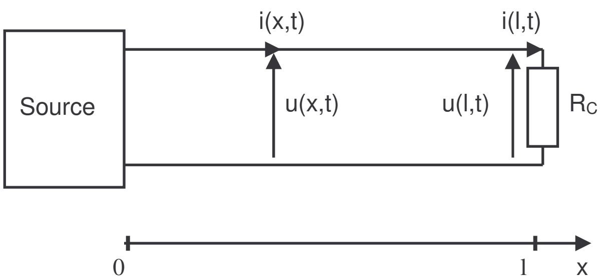
Sur une telle ligne, on observe *un régime d'ondes progressives.*

Toute la puissance fournie par le générateur est transmise par la ligne à la charge R_C, et y est absorbée.

A toute abscisse x, on peut écrire :

$$i(x,t) = \hat{I}_1 . \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

$$u(x,t) = \hat{U}_1 . \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$



L'amplitude des signaux est la même en tous points (à l'affaiblissement près)

Notamment, en x = l : $i(l,t) = \hat{I}_1 . \cos \omega\left(t - \frac{l}{c}\right)$ et $u(l,t) = \hat{U}_1 . \cos \omega\left(t - \frac{l}{c}\right)$

or, en x = l, la loi d'Ohm impose $u(l, t) = R_C \times i(l, t)$; il en découle la relation $R_C = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1}$.

Cette relation est valable à toute abscisse x, et bien sur à l'entrée de la ligne :

La résistance d'entrée d'une ligne sans pertes, fermée sur sa résistance caractéristique R_C, est égale à R_C.

(quelle que soit sa longueur !)

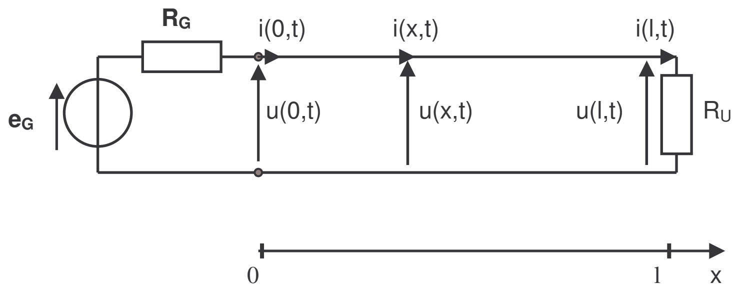
La puissance fournie par un générateur à une ligne fermée sur son impédance caractéristique sera optimale si la résistance de sortie du générateur est égale à la résistance caractéristique R_C.
(Il y aura ainsi adaptation des impédances côté générateur et côté charge)

Application : Antennes d'émission.
Une antenne est un dipôle dont les caractéristiques géométriques sont ajustées de telle façon qu'elle soit équivalente, à la fréquence de travail, à la résistance caractéristique de la ligne qui l'alimente.

4 . La ligne désadaptée. Coefficient de réflexion.

4.1 Cas général.

Considérons toujours une ligne , dont on néglige les pertes, de longueur l, d'impédance caractéristique Z_C (résistive).
Cette ligne est attaquée par un générateur de résistance de sortie R_G, et fermée à l'autre extrémité sur une résistance $R_U \neq R_C$



On aura cette fois l'existence simultanée d'un signal incident et d'un signal réfléchi :

$$u(x,t) = \hat{U}_1 . \cos \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \hat{U}_2 . \cos \omega\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$i(x,t) = \hat{I}_1 . \cos \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \hat{I}_2 . \cos \omega\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Une partie de la puissance injectée par le générateur sur cette ligne lui revient donc en retour.

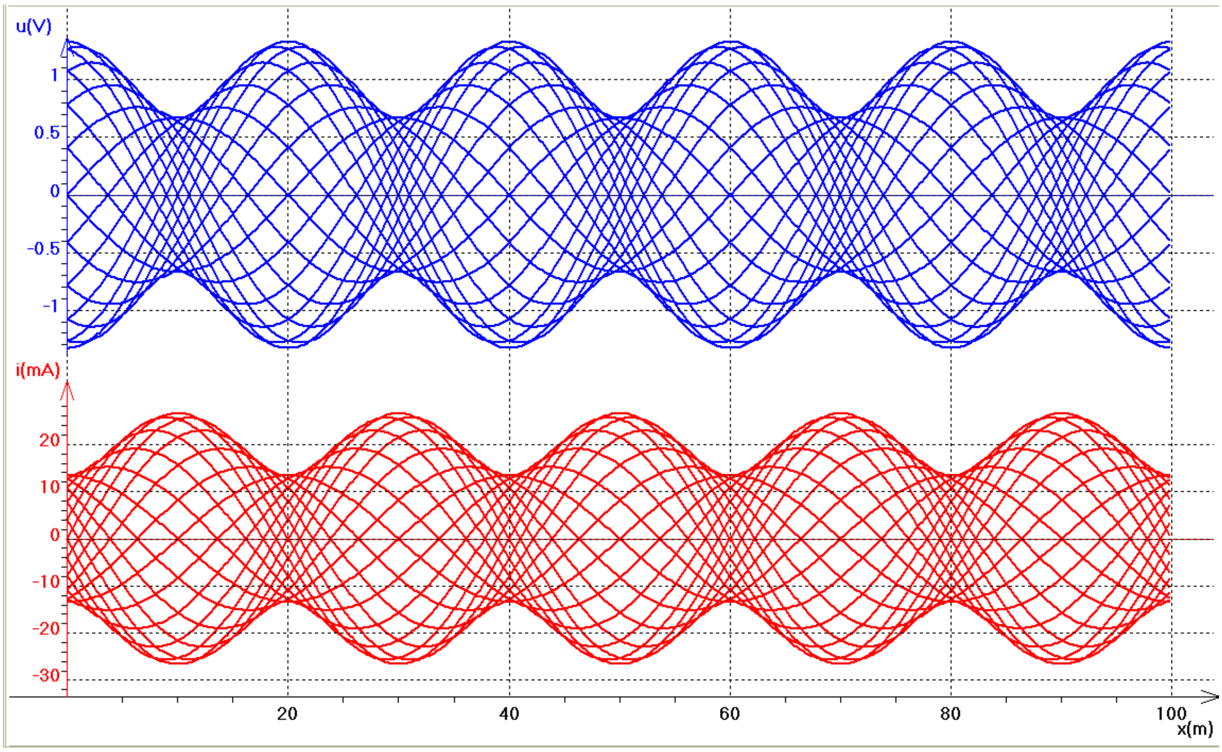
On définit un *coefficient de réflexion* ρ qui mesure l'importance de l'onde réfléchie : $\rho = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}$.

Si R_C est la résistance caractéristique de la ligne et R_U la résistance terminale, on peut montrer :

$$\boxed{\rho = \frac{R_u - R_c}{R_u + R_c}}$$

Le coefficient de réflexion ρ évolue entre +1 pour R_U infinie (ligne ouverte) et -1 pour $R_U = 0$ (ligne en court-circuit) ; ρ passe par 0 pour $R_U = R_C$ (ligne adaptée)
(une valeur négative de ρ correspond à un changement de polarité)

Exemple :
On donne , page suivante, la répartition d'amplitude de la tension et du courant au long d'une ligne désadaptée.
La ligne a une impédance caractéristique 50Ω ; elle est supposée sans pertes, de longueur 100m ; la vitesse de propagation y est de 200000km/s.
Le générateur injecte une tension sinusoïdale de fréquence 5MHz et d'amplitude 1V ; son impédance de sortie est 50Ω.
La ligne est fermée sur une résistance de 100Ω.
On peut ainsi calculer un coefficient de réflexion ρ ≈ 0,33



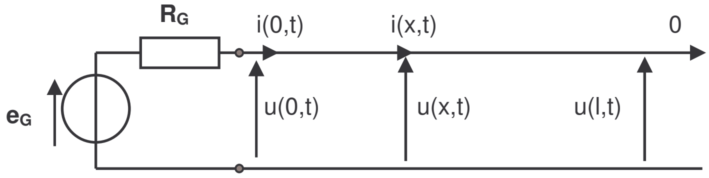
Nous pouvons constater plusieurs phénomènes :

- L'amplitude des signaux (tension et courant) *n'est plus constante* au long de la ligne ; elle évolue *périodiquement* entre des minimas et des maximas.
- A un maximum de tension, correspond un minimum de courant , et réciproquement.

Quantitativement, les maximas de tension sont donnés par $\hat{U}_{MAX} = \hat{U}_1 \times (1 + \rho)$ (soit ici 1,33V) et les minimas par $\hat{U}_{MIN} = \hat{U}_1 \times (1 - \rho)$ (soit ici 0,67V)
On peut mesurer 20m entre 2 minimas ou entre 2 maximas. Dans les conditions du tracé, la longueur d'onde associée au signal injecté est $\lambda = \frac{c}{f} = 40\text{m}$; *l'écart entre deux minimas ou 2 maximas successifs est égal à λ/2*.

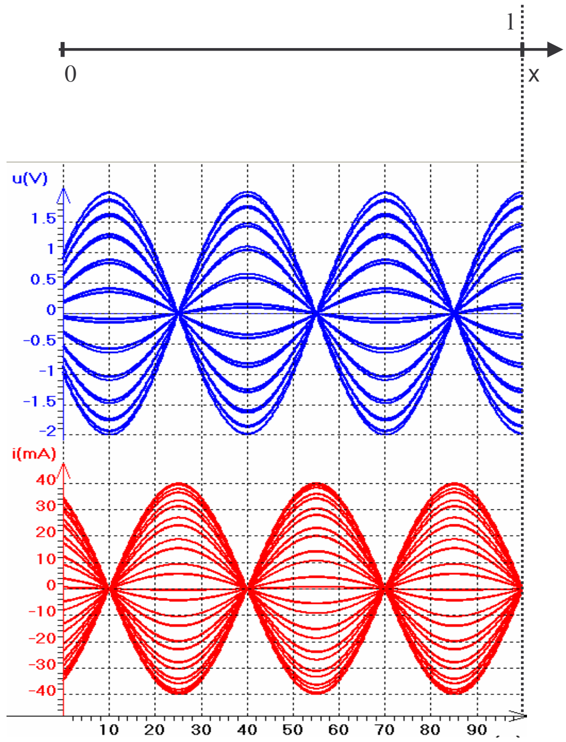
On voit tout de suite l'inconvénient de cette désadaptation : Selon la longueur de la ligne utilisée, l'amplitude du signal en bout de ligne n'est pas définie à priori.

4.2 Cas de la ligne ouverte.



Le courant est nul au niveau de la charge, donc celle-ci ne reçoit aucune puissance. En conséquence, toute la puissance injectée par le générateur lui revient.

Le coefficient de réflexion vaut +1 : L'amplitude de la tension réfléchie est égale à celle de la tension incidente ; ces 2 ondes sont en phase en x = l (et leurs amplitudes s'y ajoutent).
Il en est de même pour le courant, sauf que courant incident et courant réfléchi sont en opposition de phase en x = l. (et donc leurs amplitudes s'annulent mutuellement).



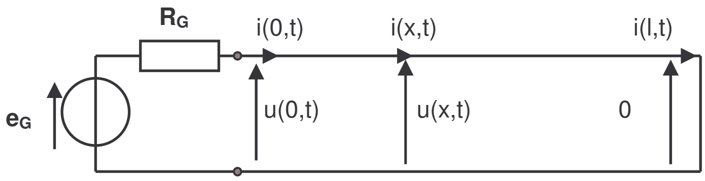
On obtient un *ventre de tension* et un *nœud de courant* à l'extrémité de la ligne.

La répartition des amplitudes au long de la ligne évolue maintenant entre des minimas nuls appelés *nœuds* et des maximas appelés *ventres.*

2 nœuds ou 2 ventres sont distants de $\lambda/2$;

A un nœud de tension correspond un ventre de courant et réciproquement.

4.3 Cas de la ligne en court-circuit.

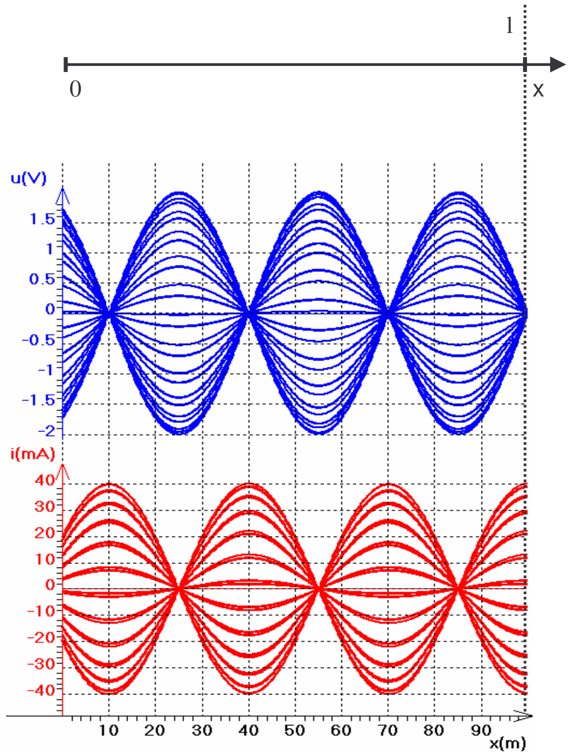


La tension est nulle aux bornes de la charge, donc, comme dans le cas de la ligne ouverte, la charge ne reçoit pas de puissance et toute la puissance injectée par le générateur lui revient !

On a cette fois ρ = -1 ; les amplitudes des ondes réfléchies et des ondes incidentes sont identiques, mais cette fois ce sont les ondes de courant qui sont en phase en x = l, et qui s'ajoutent.

Inversement, les ondes de tension sont en opposition de phase en x = l et s'annulent mutuellement.

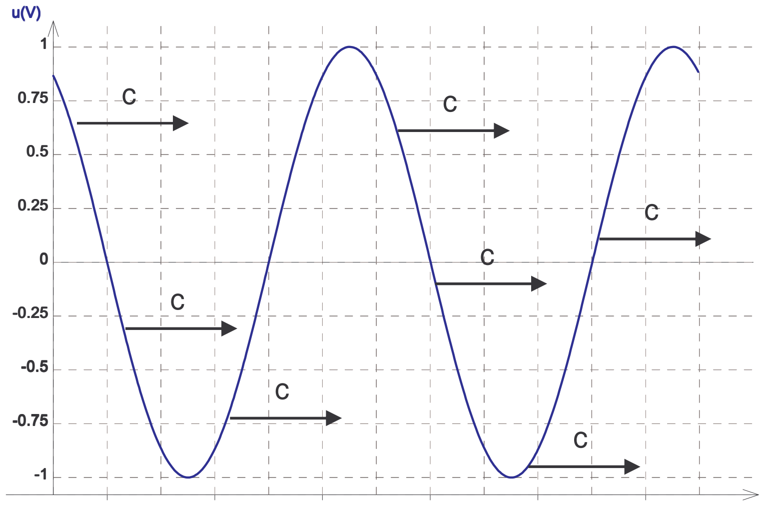
La répartition en nœuds et ventres est complémentaire de celle observée pour la ligne ouverte. (à fréquence, célérité et longueur de ligne identiques !)



5 . Ondes stationnaires – Taux d'ondes stationnaires.

Lorsqu'il y a adaptation des impédances entre le générateur, la ligne et la charge terminale, il n'existe pas d'onde réfléchie et l'amplitude des signaux est constante au long de la ligne.

On est en présence d'une *onde progressive pure*. (Cf . ci-contre)



Dans les 2 cas extrêmes que constituent la ligne ouverte ou la ligne en court-circuit, le coefficient de réflexion est de 100% : Il n'y a globalement plus de propagation, l'onde semble « vibrer » sur place. plus aucune puissance ne progresse du générateur vers la charge.
On est en présence de ce qu'on nomme un *régime d'ondes stationnaires*.

Dans le cas le plus général (ligne et charge désadaptées, mais sans atteindre le court-circuit ni le fonctionnement à vide) on aura la superposition des 2 phénomènes : onde progressive + onde stationnaire, avec évolution périodique de l'amplitude des signaux sur la ligne.
Du point de vue énergétique, l'existence d'une « dose » d'onde stationnaire est équivalente à la dégradation de la transmission de la puissance du générateur vers l'impédance terminale. (par rapport au cas de l'onde progressive pure)

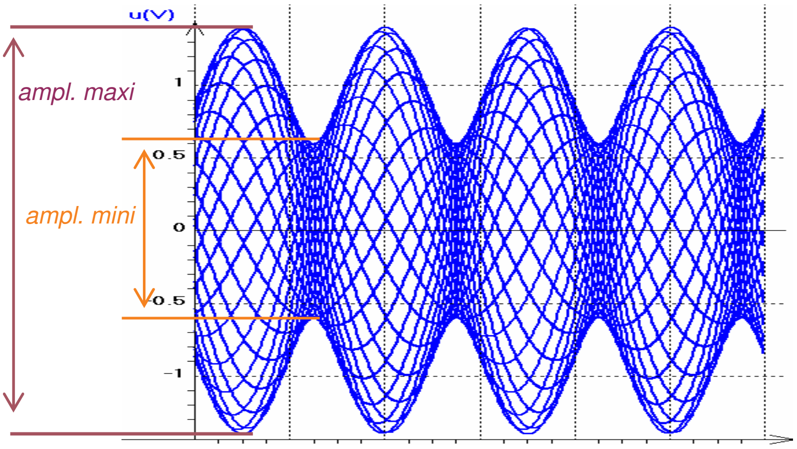
On caractérise cet état de superposition par le *taux d'ondes stationnaires*. (TOS en abrégé)

Si ρ désigne le coefficient de réflexion,

$$\boxed{TOS = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}}$$

soit encore :

$$\boxed{TOS = \frac{\text{ampl. max i}}{\text{ampl. min i}}}$$



Pour une ligne adaptée, ρ = 0 et ampl. maxi = ampl. mini :

Pour une ligne adaptée, le taux d'ondes stationnaires vaut 1.

Pour une ligne ouverte ou en court-circuit, ρ =± 1 et ampl. mini = 0 :

Pour une ligne ouverte ou en court-circuit, le taux d'ondes stationnaires est infini

Dans la pratique, il est illusoire d' obtenir un TOS de 1 ; on considère que la ligne est adaptée pour un TOS compris entre 1 et 1,5 environ (soit un coefficient de réflexion inférieur à 20%)

(Remarque : Certains auteurs parlent de ROS : Rapport d'ondes stationnaires)

6 . Cas particuliers : Ligne ¼ d'onde – Ligne ½ onde.

Nous travaillons avec des signaux de fréquence f constante.

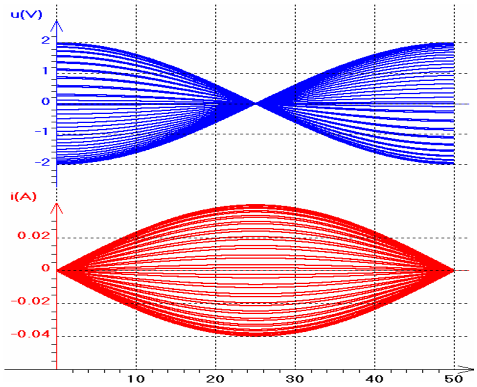
Si c désigne la vitesse de propagation :

- La ligne ½ onde est caractérisée par une longueur $l = \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{c}{2f}$
- La ligne ¼ d'onde est caractérisée par une longueur $l = \dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{c}{4f}$

Ligne ½ onde ouverte :

La tension est maximale aux 2 extrémités et nulle au centre ;
le courant est nul aux 2 extrémités et maximal au centre.

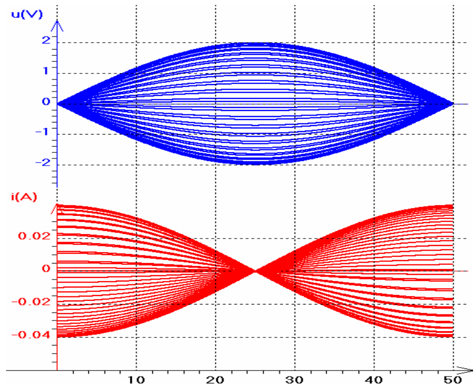
La ligne ½ onde ouverte est vue comme une impédance infinie par le générateur de commande.



Ligne ½ onde en court-circuit :

La tension est maintenant nulle aux 2 extrémités et maximale en son centre, tandis que le courant est maximal aux 2 extrémités et nul au centre.

La ligne ½ onde en court-circuit est vue comme un court circuit par le générateur de commande.

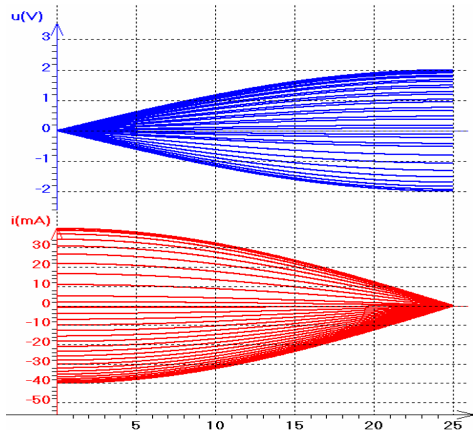


Ligne ¼ d'onde ouverte :

La tension est maximale côté charge et minimale côté générateur.

C'est l'inverse pour le courant : Nul côté charge, il est maximal côté générateur.

La ligne ¼ d'onde ouverte est vue comme un court-circuit par le générateur de commande !

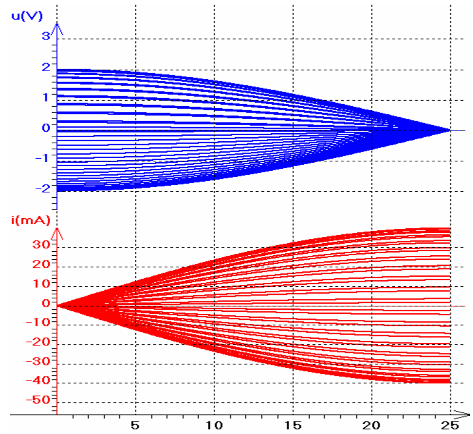


Ligne ¼ d'onde en court-circuit :

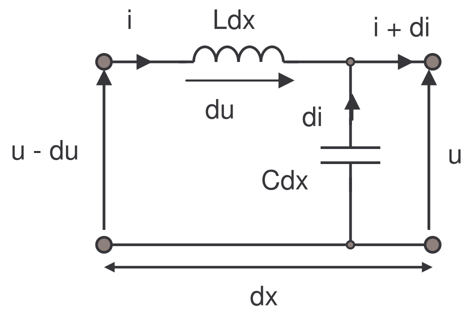
La tension est maximale côté générateur et nulle côté charge.

Pour le courant : Il est nul côté générateur et maximal côté charge.

La ligne ¼ d'onde en court-circuit est vue comme un circuit ouvert par le générateur de commande !



Annexe : Équation de propagation d'un signal sur une ligne.
Solution générale - Impédance caractéristique



Considérons un tronçon de ligne de longueur infinitésimale dx, supposée sans pertes. (voir figure ci-contre)
D'un bout à l'autre de ce tronçon, la tension u(t) varie de du(t), tandis que l'intensité i(t) varie de di(t).

Aux bornes de l'inductance : $du = -L.dx.\frac{di}{dt}$

Aux bornes de la capacité : $di = -C.dx.\frac{du}{dt}$

Dans la mesure où dx est une grandeur infinitésimale, on peut écrire 2 autres équations :

$$(1)\quad \frac{du}{dx} = -L.\frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad (2)\quad \frac{di}{dx} = -C.\frac{du}{dt}$$

Dérivons (1) par rapport au temps : $\frac{d^2u}{dx.dt} = -L.\frac{d^2i}{dt^2}$

dérivons de même (2) par rapport à x : $\frac{d^2i}{dx^2} = -C.\frac{d^2u}{dt.dx}$

l'ordre de dérivation n'important pas, ces 2 dérivées secondes amènent à : $\boxed{\frac{d^2i}{dx^2} = LC.\frac{d^2i}{dt^2}}$

Dérivons maintenant (1) par rapport à x et (2) par rapport au temps ; on obtient 2 nouvelles équations :

$\frac{d^2u}{dx^2} = -L.\frac{d^2i}{dt.dx}$ d'une part et $\frac{d^2i}{dx.dt} = -C.\frac{d^2u}{dt^2}$ d'autre part

d'ou on tire finalement $\boxed{\frac{d^2u}{dx^2} = LC.\frac{d^2u}{dt^2}}$

L'intensité i et la tension u sont des fonctions de x et de t : i(x, t) et u(x, t), solutions de 2 équations identiques, dites *équations des télégraphistes*. (Au sens physique le plus général, ces équations sont nommées équations de propagation d'une onde)
On aura ainsi i(x, t) et u(x, t) de la même forme.

Par exemple, pour le courant i(x, t), on peut trouver une solution sinusoïdale à l'équation de propagation :

$$i(x, t) = \hat{I}_1.\cos(\omega t - kx) + \hat{I}_2.\cos(\omega t + kx)$$

Vérifions la validité de cette solution:

$$\frac{d^2i}{dx^2} = -k^2.\hat{I}_1.\cos(\omega t - kx) - k^2.\hat{I}_2.\cos(\omega t + kx) = -k^2.i(x, t)$$

et
$$\frac{d^2i}{dt^2} = -\omega^2.\hat{I}_1.\cos(\omega t - kx) - \omega^2.\hat{I}_2.\cos(\omega t + kx) = -\omega^2.i(x, t)$$

d'où $\frac{d^2i}{dx^2} = \frac{k^2}{\omega^2}.\frac{d^2i}{dt^2}$; l'équation des télégraphistes est vérifiée avec $\frac{k^2}{\omega^2} = LC$, soit $k = \omega\sqrt{LC}$.

Finalement, nous aurons, pour les expressions du courant et de la tension sur la ligne, à l'abscisse x et à la date t :

$$i(x, t) = \hat{I}_1.\cos\omega\left(t - x\sqrt{LC}\right) + \hat{I}_2.\cos\omega\left(t + x\sqrt{LC}\right)$$
$$u(x, t) = \hat{U}_1.\cos\omega\left(t - x\sqrt{LC}\right) + \hat{U}_2.\cos\omega\left(t + x\sqrt{LC}\right)$$

Le terme $\hat{I}_1.\cos\omega\left(t - x\sqrt{LC}\right)$ correspond à la propagation d'un signal sinusoïdal, vers les x positifs, et à la vitesse $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; le terme $\hat{I}_2.\cos\omega\left(t + x\sqrt{LC}\right)$ correspond quant à lui à la propagation d'un signal sinusoïdal à la vitesse - c, c'est à dire vers les x négatifs.

En conclusion :

*La tension et le courant en tous points d'une ligne de transmission apparaissent comme la superposition d'une **onde incidente** et d'une **onde réfléchie**.*

Ces 2 ondes se propagent à la même vitesse (en valeur absolue) : $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, l'onde incidente progressant de la source vers la charge et l'onde réfléchie progressant de la charge vers la source.

$$i(x,t) = \hat{I}_1.\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \hat{I}_2.\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$u(x,t) = \hat{U}_1.\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \hat{U}_2.\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Impédance caractéristique.

Les expressions de i(x, t) et u(x, t) doivent vérifier les équations (1) $\frac{du}{dx} = -L.\frac{di}{dt}$ et (2) $\frac{di}{dx} = -C.\frac{du}{dt}$ (cf. plus haut) :

$$(1) \rightarrow \frac{\omega}{c}\hat{U}_1.\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{\omega}{c}\hat{U}_2.\sin\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) = L\omega\hat{I}_1.\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + L\omega\hat{I}_2.\sin\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$(2) \rightarrow \frac{\omega}{c}\hat{I}_1.\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{\omega}{c}\hat{I}_2.\sin\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) = C\omega\hat{U}_1.\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + C\omega\hat{U}_2.\sin\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Identifions terme à terme :

$$\frac{\omega}{c}\hat{U}_1 = L\omega\hat{I}_1 \;;\quad -\frac{\omega}{c}\hat{U}_2 = L\omega\hat{I}2 \;;\quad \frac{\omega}{c}\hat{I}_1 = C\omega\hat{U}_1 \;;\quad -\frac{\omega}{c}\hat{I}_2 = C\omega\hat{U}_2$$

D'où les rapports $\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = -\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2} = Lc = \frac{1}{Cc} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, compte tenu de la relation $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Le rapport des amplitudes de la tension et du courant pour l'onde incidente et pour l'onde réfléchie reste le même ; ce rapport se nomme impédance caractéristique de la ligne.

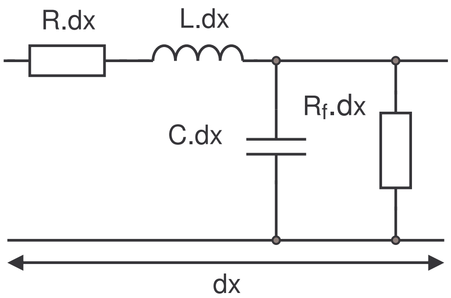
$$\boxed{Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \left|\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1}\right| = \left|\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2}\right|}$$

Remarque : Résultats correspondant à une ligne réelle.

On prend en compte les résistances (pertes) dans le modèle (cf. ci-contre)

Les calculs, plus complexes, aboutissent à des résultats de même nature : La tension et le courant sont toujours formés par superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie.

Il s'ajoute la notion d'affaiblissement : Les termes résistifs traduisent les pertes ; l'amplitude de l'onde incidente décroît avec les x croissants ; l'amplitude de l'onde réfléchie décroît avec les x décroissants.



Vitesse de propagation : $c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \left(1 + \left(\frac{R}{L\omega}\right)^2\right)^{-1/4}$ Elle est plus faible que pour la ligne sans pertes et varie avec la fréquence des signaux (milieu dispersif).

Impédance caractéristique : $\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{1/R_f + jC\omega}}$ C'est une grandeur complexe dont le module et l'argument évoluent avec la fréquence des signaux. Aux fréquences « élevées », on peut cependant négliger les termes résistifs et retrouver la forme réelle $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$.